THEORY well_founded_set(s, ◁)
$[\forall t \subseteq s \mid t \neq \emptyset \rightarrow [\exists m \in t, \forall u \in t \mid \neg u \lhd m]]$
-- ◁ is thereby assumed to be an irreflexive well-founded relation on s

$\Longrightarrow$ (orden)

well_founded_set · 1 ⊢ $[\forall x \in s, \forall y \in s \mid (x \lhd y \rightarrow \neg y \lhd x) \;\&\; \neg x \lhd x]$

-- $\text{Minrel}(T) =_{\text{Def}}$ **if** $T \subseteq s \;\&\; T \neq \emptyset$ **then arb**$(\{m : m \in T \mid [\forall u \in T \mid \neg u \lhd m]\})$ **else** s **fi**

-- $\text{orden}(X) =_{\text{Def}} \text{Minrel}(s \setminus \{\text{orden}(y) : y \in X\})$

well_founded_set · 2 ⊢ $s \subseteq \{\text{orden}(y) : y \in X\} \leftrightarrow \text{orden}(X) = s$

well_founded_set · 3 ⊢ $\text{orden}(X) \neq s \leftrightarrow \text{orden}(X) \in s$

-- Well-ordering complies with ordinal enumeration

well_founded_set · 5 ⊢ $\text{Ord}(U) \;\&\; \text{Ord}(V) \;\&\; \text{orden}(U) \neq s \;\&\; \text{orden}(V) \neq s \rightarrow (\text{orden}(U) \lhd \text{orden}(V) \rightarrow U \in V)$

well_founded_set · 6 ⊢ $\{u : u \in s \mid u \lhd \text{orden}(V)\} \subseteq \{\text{orden}(x) : x \in V\}$

-- Well-ordering is initially 1-1

well_founded_set · 7 ⊢ $\text{Ord}(U) \;\&\; \text{Ord}(V) \;\&\; \text{orden}(U) \neq s \;\&\; \text{orden}(V) \neq s \;\&\; U \neq V \rightarrow \text{orden}(U) \neq \text{orden}(V)$

well_founded_set · 8 ⊢ $[\exists o \mid \text{Ord}(o) \;\&\; s = \{\text{orden}(x) : x \in o\} \;\&\; 1\text{–}1(\{\langle x, \text{orden}(x)\rangle : x \in o\})]$

END well_founded_set

THEORY well_ordered_set(s, ◁)
$[\forall x \in s, \forall y \in s \mid (x \lhd y \vee y \lhd x \vee x = y) \;\&\; \neg x \lhd x] \;\&\; [\forall x \in s, \forall y \in s, \forall z \in s \mid x \lhd y \;\&\; y \lhd z \rightarrow x \lhd z]$
$\;\&\; [\forall t \subseteq s \mid t \neq \emptyset \rightarrow [\exists x \in t, \forall y \in t \mid x \lhd y \vee x = y]]$

$\Longrightarrow$ (orden)

well_ordered_set · 1 ⊢ $[\forall t \subseteq s, \exists x \mid t \neq \emptyset \rightarrow x \in t \;\&\; [\forall y \in t \mid x \lhd y \vee x = y]]$

-- Minrel ⟶ well_ordered_set · 1 $\Longrightarrow$ $[\forall t \subseteq s \mid t \neq \emptyset \rightarrow \text{Minrel}(t) \in t \;\&\; [\forall y \in t \mid \text{Minrel}(t) \lhd y \vee \text{Minrel}(t) = y]]$

-- $\text{orden}(X) =_{\text{Def}}$ **if** $s \subseteq \{\text{orden}(y) : y \in X\}$ **then** s **else** $\text{Minrel}(s \setminus \{\text{orden}(y) : y \in X\})$ **fi**

well_ordered_set · 2 ⊢ $s \subseteq \{\text{orden}(y) : y \in X\} \leftrightarrow \text{orden}(X) = s$

well_ordered_set · 3 ⊢ $\text{orden}(X) \neq s \rightarrow \text{orden}(X) \in s$

-- Monotonicity of Minrel

-- well_ordered_set · 4 ⊢ $R \subseteq s \;\&\; T \subseteq R \;\&\; T \neq \emptyset \rightarrow \text{Minrel}(R) = \text{Minrel}(T) \vee \text{Minrel}(R) \lhd \text{Minrel}(T)$

-- Well-ordering is isomorphic to ordinal enumeration

well_ordered_set · 5 ⊢ $\text{Ord}(U) \;\&\; \text{Ord}(V) \;\&\; \text{orden}(U) \neq s \;\&\; \text{orden}(V) \neq s \rightarrow (\text{orden}(U) \lhd \text{orden}(V) \leftrightarrow U \in V)$

well_ordered_set · 6 ⊢ $\text{Ord}(V) \;\&\; \text{orden}(V) \neq s \rightarrow \{u : u \in s \mid u \lhd \text{orden}(V)\} = \{\text{orden}(x) : x \in V\}$

-- Well-ordering is initially 1-1

well_ordered_set · 7 ⊢ $\text{Ord}(U) \;\&\; \text{Ord}(V) \;\&\; \text{orden}(U) \neq s \;\&\; \text{orden}(V) \neq s \;\&\; U \neq V \rightarrow \text{orden}(U) \neq \text{orden}(V)$

well_ordered_set · 8 ⊢ $[\exists o \mid \text{Ord}(o) \;\&\; s = \{\text{orden}(x) : x \in o\} \;\&\; [\forall x \in o \mid \text{orden}(x) \neq s] \;\&\; 1\text{–}1(\{\langle x, \text{orden}(x)\rangle : x \in o\})]$

well_ordered_set · 9 ⊢ $(\text{Ord}(V) \;\&\; \text{orden}(V) \neq s \rightarrow 1\text{–}1(\{\langle x, \text{orden}(x)\rangle : x \in V\}))$
$\;\&\; \mathbf{domain}(\{\langle x, \text{orden}(x)\rangle : x \in V\}) = V$
$\;\&\; \mathbf{range}(\{\langle x, \text{orden}(x)\rangle : x \in V\}) = \{u \in s : u \lhd \text{orden}(V)\}$
$\;\&\; \{u : u \in s \mid u \lhd \text{orden}(V)\} = \{\text{orden}(x) : x \in V\}$

END well_ordered_set